DE SUPERFICIEBUS ALGEBRAICIS IN PLANUM EXPLICABILIBUS.

DISSERTATIO INAUGURALIS MATHEMATICA

QUAM

CONSENSU ET AUCTORITATE

AMPLISSIMI PHILOSOPHORUM ORDINIS

IN ACADEMIA FRIDERICIANA HALENSI

CUM VITEBERGENSI CONSOCIATA

AD SUMMOS

IN PHILOSOPHIA HONORES

RITE IMPETRANDOS

DIE XXI. M. FEBR. A. MDCCCLXIII

HORA XI. L. S.

UNA CUM SENTENTIIS CONTROVERSIS

PUBLICE DEFENDET

CAROLUS HAMDORFF

BEROLINENSIS.

ADVERSARIORUM PARTES TENEBUNT:

REICH, STUD. MATH.

WEINGAERTNER, STUD. MATH.

HALIS SAXONUM.

FORMIS PLOETZIANIS.

CAROLO PICHT

VIRO OPTIMO.

Calculo differentiali a divis Leibnitzio et Neutone invento, majores demum hujus calculi applicationes fecit Euler inprimis ad theoriam curvarum duplicis curvaturae superficierumque, quarum aequatio secundum ordinem superat. Optime autem de hac mathematicorum parte meruerunt gallici geometri, qui priore saeculo exeunte ineunteque nostro fuerunt, inprimis Monge, Dupin, Legendre, Lacroix, de recentioribus Cauchy et Chasles, deinde e nostris Steiner, Joachimsthal, Plücker, Hesse aliique permulti, qui in diariis mathematicis Crellianis plures commentationes scripserunt, ex anglicis Cayley et Salmon, de italianis denique Chelini, Tortolini alii. Qui viri quamvis summo studio hanc geometriae partem tractaverint, plura tamen nobis reliquerunt disserenda eaque ad singulos casus adhibenda, quae generatim de superficiebus graduum sublimiorum discusserunt. Itaque ego etiam singulare quoddam genus superficierum, explicabiles elegi deque iis sum dissertaturus, inprimis ratione habita algebraicarum, quarum proprietates paucis contemplemur.

Priusquam autem adgrediamur ad id quod propositum nobis est, operae pretium mihi videtur esse brevem eorum praemittere enarrationem, quae jam de generalibus superficierum explicabilium proprietatibus a rerum mathematicarum scriptoribus recentioris aevi disputata sunt. Neque alienum videatur eos enumerare, qui egerunt de hac re, quorum praecipui sunt:

Monge: application de l'analyse à la géometrie id. Mém. de l'Académie des sciences à Paris a. a. 1784. 1808. Mém. des savants étrangers tome IX. X.

Moigno leçons de calcul intégral et differential Par. 1840.

Gauss disquisitiones generales circa superficies curvas (i. d. tractatus academiae Goettingensis a. a. 1826).
Littrow analytische Geometrie Wien 1822.
Brandes höhere Geometrie Leipz. 1823. 24.
Klügel math. Wörterb. articulus, cui inscriptum est: „abwickelbare Flächen", nec non in suppl. Grunerti: „einhüllende Flächen, Evolution der Curven" etc.
(Alias commentationes de certis modo quibusdam partibus agentes apto loco citaturus sum)*).

Caput I.

Disquisitiones generales circa superficies explicabiles.

1. Superficies quaedam in aliam dicitur explicabilis, si eandem atque illa mensuram habet curvaturae ita, ut omnes illius partes supra eam flecti possint. Nos autem hoc loco non de generalibus illis superficiebus sumus dissertaturi, sed de iis modo, quae explicari possunt in planum et per excellentiam superficies explicabiles (surfaces-développables — developable surfaces — abwickelbare Flächen) dicuntur.

2. Jam ex ipsa definitione talium superficierum proprietates sequuntur. Sicuti enim illae in planum, ita planum etiam supra illas flecti potest.

Apparet igitur esse eas,

1) quas planum tangentium in tota linea recta tangat vel quarum duo plana tangentium infinite propinqua in linea recta se secent.

*) Sed praeter hanc introductionem totius dissertationis modo secundam partem imprimendam curavi priorisque, in qua de generalibus superficierum explicabilium proprietatibus paullo fusius exexposueram, tantum quam paucis capita principalia addo.

2) In quibus lineae rectae duci possint atque ita, ut binae consequentes se recent.

3) Quae tangentibus curvae alicujus generentur.

Ex his proprietatibus statim sequuntur hae aequationes

ex (1) I. $rt - s^2 = 0$

ex (2) II. $x = az + fa,\ y = z\varphi a + \int f'a\varphi' a\, da,$

ubi parameter a eliminanda est

ex (3) si curvae aequationes sunt $x' = f(z');\ y' = F(z')$.

$$\frac{x - fk}{f'k} = \frac{y - Fk}{f'k} = z - k, \text{ ubi } k \text{ eliminanda est.}$$

Deinde integratione aequationis (I) habemus

III. $p = f(q)$

et IV. $z = xfq + qy - Fq;\ y = -xf^1q + F^1q.$

ubi q eliminanda est.

3. Liquet deinde superficies explicabiles modo proprium et peculiare genus esse superficierum involventium (nos: einhüllende Flächen — gall. enveloppes — angl. envelopes). Illae enim eae definiuntur, quae seriem superficierum involutarum (enveloppées) et parametro modo inter se differentium, involvunt. Quodsi involutas superficies plana esse ponimus accipimus superficiem involventem explicabilem. Quare si plani illius aequatio ponitur $z = x\varphi t + y\psi t + t$, differentiata illa $o = x\varphi' t + y\psi' t + t$, parametro t eliminata superficiem explicabilem habebimus. Et re vera illa aequatio partialiter differentiata = (I) evadit. Sequitur, ut charactéristicae (charactéristiques) lineae rectae sint et generatrices ipsae, deinde ut curva regressoria ea sit, cujus tangentibus superficies generatur. Lineas characteristicas habebimus, si pro t certum quendam valorem substituimus et priores illas aequationes plani et differentiatam conjungimus, curvam autem regressoriam, si rursus differentiamus $0 = x\varphi'' t + y\psi'' t$ et ex tribus illis t eliminamus.

4. Deinde notum est superficiem explicabilem cogitari posse locum omnium evolutarum curvae cujusdam duplicis curvaturae, inesse in ea centra curvaturae curvae evolventis, esse polarem (Polfläche). Inter curvam autem

regressoriam superficiei polaris et curvam evolventem hae intercedunt relationes primum a Cl. Fourier, tum accuratius ab Ill. Lancret *) tractatae:

1) Prima inflexio curvae evolventis aequalis est secundae curvae regressoriae.

2) Secunda inflexio evolventis primae regressoriae aequalis est.

5. Quod attinet ad curvaturam superficierum explicabilium, statim e generali illa radii curvaturae aequatione:

$$(rt-s^2)\varrho^2 - \{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t\}\sqrt{1+p^2+q^2}.\varrho + (1+p^2+q^2)^2 = 0$$

si cum Cl. Meunier ponimus **)

$rt-s^2 = V$; $r(1+q^2) - 2pqs + t(1+p^2) = U$, $\sqrt{1+p^2+q^2} = K$ habemus $\varrho_1 = \frac{2K^3}{U-\sqrt{U^2-4VK^2}}$.

et $\varrho_2 = \frac{2K^3}{U+\sqrt{U^2-4VK^2}}$.

Pro superficiebus autem explicabilibus habemus (I) $rt-s^2 = V = 0$. Inde $\varrho_1 = \infty$, aut si Gaussii mensuram curvaturae respicimus, intelligimus illam nihilo esse aequalem. Sequitur, ut superficies explicabiles mediae sint inter concavo-concavas et convexo-concavas. Deinde facile est visu directionem, in qua radius ille $= \infty$ est, esse debere eam linearum generatricium, unde intelligimus eas esse lineas curvaturae in superficiebus explicabilibus, Harum autem alterum genus, quippe quod prius sub angulo recto secet, apparet esse evolventes curvae regressoriae ***). Cujus aequationes si ponimus

$$x = \varphi t,\quad y = \psi t,\quad z = \chi t$$

et x_1 y_1 z_1 linearum curvaturae coordinatas, sumimus, habemus:

---

*) Mém. des savans étmngers tome I. a. a. 1805 p. 419 ff.

**) Mém. des s. étr. tome X. p. 477 ff.

***) Joachimsthal sur les surfaces dont les lignes de l'une des courbures sont planes Crf. col. 54 p. 181—92. — Bonnet journ. de l'école polytechnique cah. 85. p. 382.

$$V.\quad \begin{cases} x_1 = \varphi t - \int dt\, \sqrt{\chi' t^2 + \psi' t^2 + \varphi' t^2}\, \dfrac{\varphi^1 t}{\sqrt{\chi' t^2 + \psi' t^2 + \varphi' t^2}} \\ y_1 = \psi t - \int dt\, \sqrt{\chi' t^2 + \psi' t^2 + \varphi' t^2}\, \dfrac{\psi^1 t}{\sqrt{\chi' t^2 + \psi' t^2 + \varphi' t^2}} \\ z_1 = \chi t - \int dt\, \sqrt{\chi' t^2 + \psi' t^2 + \varphi' t^2}\, \dfrac{\chi^1 t}{\sqrt{\chi' t^2 + \psi' t^2 + \varphi' t^2}} \end{cases}$$

6. Lineae brevissimae in superficiebus explicabilibus inprimis generatrices ipsae sunt, deinde jam Cl. Monge demonstravit evolutas curvae cujusdam duplicis curvaturae in superficie polari esse lineas brevissimas, postremo liquet harum innumerabilem esse posse multitudinem. De quibus quum disseruerint Minding (Cr. J. 20) et G. Schell (über Abwicklung einfach krummer Flächen Marburg 1851), harum opera reproducere omitto. Non tamen praetermittendum videtur apparere per unamquamque curvam duplicis curvaturae duas poni posse superficies explicabiles, quarum altera osculatrix nominari potest generaturque tangentibus curvae, altera rectificatrix (surface rectifiante. Lancret l. c.), in qua curva linea brevissima est.

7. Postremo quod attinet ad genera superficierum explicabilium apparet dua esse pecularia, quorum primum sunt conicae, secundum cylindricae.

Conicarum enim curva regressoria punctum modo est et vertex, cylindricarum in infinito jacet. Quarum aequationes notum est esse:

conicarum: $p(a-x) + q(b-y) - (c-z) = 0;$

$$\frac{y-b}{z-c} = \varphi\left(\frac{x-a}{z-c}\right)$$

cylindricarum: $ap + bq = 1$

$$y - bz = \varphi(x - az).$$

Quibus duabus differentiatis illam (I) $rt - s^2 = 0$ existere nemo non videt. Liquet lineas characteristicas in illis etiam esse generatrices vel latera, lineas curvaturae autem in conicis semper curvas inflexionis sphaericae, in cylindricis sectiones rectas. Postremo si illas loca evolutarum curvae cujusdam resp. cogitamus, in conicis jacent evolutae curvae inflexionis sphaericae, in cylindricis evolutae curvae planae.

8. Ut denique duas alias non inelegantes formas aequationis superficierum explicabilium respiciamus, liquet si formam ponimus $F(x, y, z) = 0$ et per P, Q, R cum Eulero differentialia partialia $\frac{dF}{dx}$ etc. per P′ etc. $\frac{d^2F}{dx^2}$ etc. significamus illam $rt - s^2 = 0$ transduci in eam

$$0 = \begin{cases} P^2(Q'R' - P''^2) + Q^2(R'P' - Q''^2) \\ + R^2(P'Q' - R''^2) + 2QR(Q''R'' - P'P'') \\ + 2RP(R''P'' - Q'Q'') + 2PQ(P''Q'' - P''R''). \end{cases}$$

Deinde si curvam regressoriam ponimus $x' = f(u)$, $y' = \varphi(u)$, $z' = \psi(u)$ et tangentium aequationes $\frac{x - fu}{f'u} = \frac{y - \varphi u}{\varphi' u} = \frac{z - \psi u}{\psi u} = v$; habemus

$$\begin{cases} x = fu + vf'u \\ y = \varphi u + v\varphi' u \\ z = \psi u + v\psi' u \end{cases}$$

quae est ea, ut x, y, z duabus novis variabilibus exprimantur maximeque apta, qua analytice proprietates superficierum explicabilium inveniantur.

Caput II.

De methodo, qua inveniantur aequationes superficierum algebraicarum in planum explicabilium.

1. Quum capite priore per multas aequationis superficierum explicabilium formas dederimus, tamen non ex unaquaque aequationes superficierum certi cujusdam gradus deduci possunt. E quibus eae, quae differentialibus partialibus vel primi (uti III) vel secundi (uti I) ordinis exprimantur, minime aptae esse videntur, sed ne earum quidem (II) et (IV) forma tam est generalis ut ex iis eleganter proprietates superficierum quarundam algebraicarum determinari possit.

2. Ex omnibus autem modis, quibus superficies explicabiles generantur is secundum quem plani cujusdam involvens respicitur, maxime aptus videtur, quo utamur.

Ill. Cayley enim *), demonstravit, si systema punctorum in spatio fingimus, per bina consequentia lineas rectas ductas perque terna puncta vel per binas lineas plana posita, systema habemus, formatum planis illis, quae plana tangentium superficiei explicabilis cogitari possunt vel plana osculatoria curvae, quae est regressoria superficiei supra commemoratae. Binorum consequentium planorum intersectio linea generatrix superficiei et tangens curvae regressoriae est, duarum autem linearum systematis vel ternorum planorum consequentium puncta curvae regressoriae determinant. Itaque si plani cujurvis aequationem ponimus

1) $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$, ubi α, β, γ, δ functiones unius parametri t sunt, erit illa consecutivi:

2) $\alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' = 0$, ubi $\alpha' = \frac{d\alpha}{dt}$ etc., quibus conjunctis parametro t eliminata aequatio certae superficiei explicabilis accipitur. deinde ejus curva regressoria si rursus differentiamus

3) $\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z + \delta = 0$ et ex hic tribus „t“ eliminamus.

3. In hoc systemata certae quaedam singularitates inesse possunt. Si enim quatuor puncta consequentia vel tres lineae consecutivae in uno plano jacent vel duo plana consequentia congruant, in curva tale punctum est, quale respondet curvae planae puncto inflexionis punctumque inflexionis sphaericae in curva erit. Sin autem in superficie explicabili tres lineae generatrices congruunt jam antea planum eam fieri intelleximus, ergo talia puncta in curva regressoria esse non possunt. — Sin autem quatuor plana consecutiva vel quod idem est si duae lineae consequentes in eodem puncto concurrunt vel dua puncta consecutiva congruunt, punctum stationarium (stationary point-point de rebroussement) vel cuspis (Spitze-cusp) curvae regressoriae habetur, respondens cuspidi curvae planae **). Liquet ea accipi si tertio differentiamus

*) Liouville journal des mathématiques X, p. 245—250. Cambridge and Dublin mathematical journal vol. IX, p. 18—22.

**) Brandes höhere Geometrie II, §. 360. 361, p. 239.

4) $\alpha'''x + \beta'''y + \gamma'''z + \delta''' = 0$ et ex his quatuor (1), (2), (3), (4) t eliminamus. Simul numerus talium punctorum hac aequatione determinatur.

4. Omnino autem si α, β, γ etc. arbitraria functiones parametri t et in seriem explicabiles ponuntur, aequatio plani generantis erit $a + bt + ct^2 + dt^3 + et^4 + ft^5 + \ldots = 0$, ubi a, b, c, d etc. lineares functiones quantitatum x, y, z ponendae sunt. Liquet quo plures dignitates parametri t in aequatione originali insint eo subbimiorem existere ordinem neque inutile aut ingratum videtur pro pluribus aequationis illius formis; quaerere qui sit gradus respondentis superficiei explicabilis.

5. Sin autem accuratius talem superficiem disquisi turi sumus necesse est pro a, b, c, d ... valores quosdam substituere. Quae functiones quum plana determinantes fingi possint nihilo aequales positae, simplicissimos eorum valores et tamen generales habebimus simplici coordinatorum transformatione, dummodo $a = 0$ planum (xy), $b = 0$ illud in axi (x) secans, tertium denique $c = 0$ priora in origine coordinatarum secans fingimus. Unde habemus

5) $a = z$

6) $b = \alpha y + \beta z$

7) $c = \gamma x + \delta y + \varepsilon z$

8) $d = \zeta x + \eta y + \vartheta z + \varkappa$,

quum quarti plani expressio reduci non possit. Quantitates α, β, γ autem etc. non jam functiones parametri t, sed omnes constantes et arbitrariae sunt. Si plures essent functiones illae semper aliae eandem atque d formam habere deberent. Deinde si peculiares quosdam casus superficierum, quarum generalem aequationem per a, b, c etc. expressam habemus, contemplaturi sumus, quantitatibus α, β, γ etc. certi quidam valores tribuendi sunt, qui plures illarum etiam nihilo aequales poni possunt usque ad finem quendam, de quo statim disseremus. Nunc ne illud quidem praetermittendum est visum, $a = 0$ non solum planum (xy) sed eodem jure (xz) vel (yz) eligere nos potuisse. Apparet tum existere valores $a = y$, $b = \alpha z + \beta y$ aut $c = x$,

$b = \alpha y + \beta x$ cetera uti supra, quibus tamen valoribus aliam modo formam naturam non aliam essemus habituri.

6. Hoc loco modo generales superficies explicabiles, quibus re vera est curva regressoria contemplaturi sumus, conicarum rationem non habituri. Facile autem apparet, quum notum sit omnes aequationes superficierum conicarum existere homogeneas, si coordinatarum origo vertex ipse ponatur, ex illis aequationibus semper haberi superficies conicas, si duo vel plures coëfficientium a, b, c etc. proportionales sumuntur ita, ut tres modo restent iique nihilo aequales positi plana per verticem conicae ducta significantes. Ut cylindricae denique existant, necesse est rursus unum fieri constantem ilo, ut duo modo restent. De his igitur, quum omnium graduum functiones homogeneae facillime possint determinari sequentibus non disseramus.

7. Sed priusquam adgrediamur ad singulas superficies contemplandas necesse videtur esse notare aequationes illas, quas accipere debemus non alias esse quam illas, quae conditiones determinant, sub quibus aequatio ordinis arbitrarii radices habeant aequales. Sit aequatio illa $F(t) = 0$, notum est aequales radices inveniri, si residua illa Sturmii F_1, F_2 etc. formamus, quarum ultima F_m t diutius continere non potest. Quodsi duae radices aequales sunt aequationi, $F_m = 0$ ponendum est, haec tamen aequatio nulla alia erit, quam illa superficiei explicabilis m ti ordinis, quam supra eliminatione inveniri demonstravimus. *) Deinde si aequationi tres sunt radices aequales, $F_{m-1} = 0$ erit ponendum atque ita, ut et constans et coëfficiens quantitatis t nihilo aequales sint. Haec autem aequatio determinabit curvam regressoriam superficiei. Postremo si quatuor radices aeqalis sunt i. e. $F_{m-2} = 0$, habemus puncta stationaria. Quodsi generaliter pro aequatione m ti ordinis reciduum Fm formare possemus, statim etiam generalem superficiei explicabilis m ti ordinis aequationem haberemus ex eaque singulares possemus derivare, dummodo coëfficien-

*) Dummodo coefficientes uti supra variabilium x, y, z functiones considerantur.

tes potentiarum sublimiorum nihilo aequales poneremus. Quod tamen quum fieri non possit quumque eliminatio facilior factu videatur, quam formatio residuorum illorum, melius visum est a casibus simplicioribus evadere ratione tamen habita eorum, quae a Crelle et Eisenstein *) de conditionibus radicum aequalium disputata sunt.

Caput III.

De superficiebus explicabilibus quae functionibus secundi gradus determinantur.

1. Si primi gradus functiones α et β etc. ponimus formamque $a + bt = 0$ respicimus, planum manere nemo non videt. Alius autem gradus ille fiet, si functiones ordinis sublimioris determinuntur. Atque generalem illarum gradum si respicimus jam idem ille Cayley **) demonstravit superficiem explicabilem e functione n ti gradus derivatam fieri gradus $2(n-1)$ ti, hujus curvam regressoriam gradus $3(n-2)$, postremo numerum punctorum stationariorum $= 4(n-3)$. Omnia autem haec theoremata non a priori demonstrat, sed modo inductione, quare veri simile quidem est illa recta esse, non tamen certum.

2. Ex his formulis igitur apparet e functione secundi gradus superficiem etiam explicabilem secundi gradus evadere cum curva regressoria gradus $= 0$. i. e. puncto, nulloque puncto stationario. Et re vera calculo idem accipimus. Nam sit aequatio illa plani generantis: $a + bt + ct^2 = 0$ plani consecutivi erit $b + 2ct = 0$. Inde t eliminato habemus:

VI. $b^2 - 4ac = 0$,

qua aequatione conum secundi gradus determinari luculentissime apparet. In qua si a constans ponitur, cylinder existet. Quare intelligimus conum et cylindrum solas esse superficies secundi gradus in planum explicabiles, quod quidem alioquin notum est.

---

*) Cr. J. 13 et 27.

**) Note sur les hyperdéterminantes Cr. J. 34 p. 148.

3. Videmus etiam — uti esse debet — curvam regressoriam fieri punctum, quippe quae determinetur eliminata t quantitate ex prioribus illis et differentiata ultima i. e. $2c = 0$, qua accipitur
$a = 0$, $b = 0$, $c = 0$. His autem secantibus planis punctum determinari et originem coordinatarum et verticem coni quis est, qui non intelligat?

Caput IV.

De superficiebus explicabilibus oriundis e functionibus tertii gradus.

§. 1.

De superficiebus explicabilibus quarti gradus.

1. Superficies explicabilis derivata ex aequatione tertii gradus erit ordinis $2(2-1) = 4$ (cf. supra). Quod statim eliminatione quantitatis t ex illis

9) $a + bt + ct^2 + dt^3 = 0$

10) $b + 2ct + 3dt^2 = 0$

cognoscimus. Omnibus reductionibus factis accipitur:

VII. $(bc - 9ad)^2 = 4(c^2 - 3bd)(b^2 - 3ac)$.

quam superficiem explicabilem quarti gradus definire luculentissime apparet, quae etiam aequatio generalis omnium illarum superficierum esse videtur. Sed de hac re postea, nunc quidem videamus, quae sit natura superficiei.

2. Uncis dissolutis evadit illa:

VIII. $0 = 81a^2d^2 - 54abcd + 12ac^3 - 3b^2c^2 + 12b^3d$.

Optime autem naturam ejus cognoscemus, si ad elementa superficiei recedemus valoresque nostros (5)—(8) substituemus.

Inde existit aequatio nostra:

$$0 = \mathfrak{A}x^3z + \mathfrak{B}x^2y^2 + \mathfrak{C}x^2yz + \mathfrak{D}x^2z^2 + \mathfrak{E}xy^3 + \mathfrak{F}xy^2z + \mathfrak{G}xyz^2 + \mathfrak{H}xyz + \mathfrak{I}xz^3 + \mathfrak{J}xz^2 + \mathfrak{K}y^4 + \mathfrak{L}y^3 + \mathfrak{M}y^3z + \mathfrak{N}y^2z^2 + \mathfrak{O}yz^3 + \mathfrak{P}yz^2 + \mathfrak{Q}z^4 + \mathfrak{R}z^3 + \mathfrak{S}z^2$$

ubi coefficientium hi sunt valores:

$\mathfrak{A} = 12\gamma^3.$

$\mathfrak{B} = -3\alpha^2\gamma^2.$

$\mathfrak{C} = 18\gamma(2\gamma\delta - 3\alpha\zeta) - 6\alpha\beta.$

$\mathfrak{D} = 18\gamma(2\gamma\varepsilon - 3\beta\zeta) - 3\beta^2\gamma^2 + 81\zeta^2$

$\mathfrak{E} = 6\alpha^2(2\alpha\zeta - \gamma\delta).$

$\mathfrak{F} = 6\alpha^2(6\beta\zeta - \gamma\varepsilon) - 12\gamma\delta(\alpha\beta - 3\delta) - 54\alpha(\gamma\eta + \delta\zeta).$

$\mathfrak{G} = 36\alpha\beta^2\zeta - 54\alpha(\gamma\vartheta + \varepsilon\zeta) - 6\beta\gamma(2\alpha\eta + \beta\delta)$
$\quad - 54\beta(\gamma\eta + \delta\zeta) + 72\gamma\delta\varepsilon + 162\zeta\eta.$

$\mathfrak{H} = -54\alpha\gamma\varkappa.$

$\mathfrak{I} = 6\beta^2(2\beta\zeta - \gamma\varepsilon) - 54\beta(\gamma\vartheta + \varepsilon\zeta) + 36\gamma\varepsilon^2 - 162\zeta\vartheta.$

$\mathfrak{J} = 9\varkappa(\beta\gamma + 18\zeta).$

$\mathfrak{K} = 3\alpha^2(4\alpha\eta - \delta^2).$

$\mathfrak{L} = 12\alpha^3\varkappa.$

$\mathfrak{M} = 12\alpha^2(\alpha\vartheta + 3\beta\eta) - 6\alpha\delta(\alpha\varepsilon + \beta\delta + 9\eta) + 12\delta^3.$

$\mathfrak{N} = 3\alpha^2(12\beta\vartheta - \varepsilon^2) - 54\alpha(\delta\vartheta + \varepsilon\eta) + 12\alpha\beta(3\beta\eta - \delta\varepsilon).$
$\quad - 3\beta\delta(\beta\delta + 18\eta) + 36\delta^2\varepsilon + 81\eta?$

$\mathfrak{O} = -6\alpha\varepsilon(\beta\varepsilon + 9\vartheta) + 6\beta^2(3\alpha\vartheta + 2\beta\eta)$
$\quad + 6\delta\varepsilon(6\varepsilon - \beta^2)\, 54\beta(\delta\eta + \varepsilon\eta),$

$\mathfrak{P} = 18\alpha\varkappa(2\beta^3 - 3\varepsilon)\, 54\varkappa(\beta\delta - 3\eta).$

$\mathfrak{Q} = 3\beta^2(\beta\vartheta - 3\varepsilon^2) - 27(2\beta\varepsilon - 3\vartheta).$

$\mathfrak{R} = 6\beta\varkappa(2\beta^2 - 9\varepsilon) + 12\varepsilon^3 + 162\varkappa\vartheta.$

$\mathfrak{S} = 81\varkappa^2.$

3. Si curvam regressoriam habituri sumus, necesse est parametrum t eliminare ex aequationibus trium planorum consequentium, nempe ex illis (9), (10) et

$$11)\quad c + 3dt = 0.$$

Statim habemus $b + ct = 0$. Unde $c^2 - 3bd = 0$ eoque cum VII. conjuncta accipiuntur.

$$\text{IX.}\quad \begin{cases} c^2 - 3bd = 0 \\ b^2 - 3ac = 0 \\ bc - 9ad = 0, \end{cases}$$

quarum tertia sequitur e prioribus. Horum intersectio curva regressoria est, quam tertii gradus existere debere, statim ex eo cognoscitur, quod repraesentatur intersectio duarum superficienem secundi ordinis, quibus linea directa $c = 0$, $d = 0$; vel $b = 0$, $a = 0$ communis est (cf. infra).

4. Sed hoc ut accuratius cognoscamus rursus necesse erit recurrere ad elementa illius, und has habemus aequationes

$$\gamma^2 x^2 + 2\gamma\delta . xy + (2\gamma\varepsilon - 3\zeta) xz + \delta^2 y^2 + (2\delta\varepsilon - 3\eta) yz + (\varepsilon^2 - 3\vartheta) . z^2 = 0$$

$$\alpha^2 y^2 + (2\alpha\beta - 3\delta) yz + (\beta^2 - 3\varepsilon) z^2 - 3\gamma xz = 0$$

$$\alpha\gamma . xy + (\beta\gamma - 9\zeta) xz + (\alpha\varepsilon + \beta\delta - 9\eta) yz + \alpha\delta y^2 + (\beta\varepsilon - 9\vartheta) z^2 - 9az = 0.$$

E quibus si inter binas vel x vel y vel z etiminamus, projectiones habemus in plana (yz), (xz), (xy), quae omnes tertii gradus existunt, quum quae prius evadit aequatio gradus quarti semper per functionem linearem dividi possit. Propter ampliores formas eas addere omitto. Nec minus facile est intellectu, si per t omnes coordinatas exprimimus tum quoque functiones tertii gradus existére.

§. 2.

De superficie explicabili quarti gradus

$$z = \frac{x}{12b^2}(x^2 + 6by) + \frac{1}{12b^2}\sqrt{(4by + x^2)^3}.$$

1. Quum non ingratum neque inutile videatur exemplum quoddam superficiei quarti ordinis contemplari, eam elegi, de qua jam Brandes disputavit. *) Ille enim eam ex aequatione nostra (IV) explicat $f'q = aq$, $F' = bq$ positis, errat autem quum contendat eam.

$$12) \quad z = \frac{ax}{12b^2}(a^2 x^2 + 6by) + \frac{1}{12b^2}\sqrt{(4by + a^2 x^2)^3}$$

fieri gradus quinti, quum modo quarti sit. Inqua si simplicitatis causa $a = 1$ ponimus — explicatam habemus.

$$13) \quad 6x^3 z + 3x^2 y^2 + 36bxyz + 16by^3 - 36b^2 z^2 = 0.$$

De hac superficie, quum simplicissima videatur esse omnium superficierum explicabilium gradus sublimioris accuratius pauca disseramus.

2. Ac primum quidem videlicet eam satis facere aequationibus (III) $p = fq$ et (I) $rt - s^2 = 0$, quum sit

*) Höhere Geometrie II, §. 519 ff.

$$p = \frac{1}{4b^2}\left\{x^2 + by + x\sqrt{4by + x^2}\right\} = \frac{1}{2}q^2$$

$$q = \frac{x + \sqrt{4by + x^2}}{2b}$$

$$r = \frac{x\sqrt{4by + x^2} + 2by + x^2}{2b^2\sqrt{4by + x^2}} = q^2 t$$

$$s = \frac{x + \sqrt{4by + x^2}}{2b\sqrt{4by + x^2}} = qt;\ t = \frac{1}{\sqrt{4by + x^2}}.$$

Deinde liquet ex aequatione (IV) valoribus substitutis facile accipi posse aequationem plani generantis, cujus motione superficies ipsa orta est. Quod quum planum tangentium superficiei cogitari posse intellexerimus hanc aequationem formemus, quae erit ex

$$p(x' - x) + q(y' - y) - (z' - z)$$

$\frac{1}{2}q^2x' + qy' - z' - \frac{1}{3}bq^3 = 0$, in quam pro quotienti differentiali q parametrum arbitrariam „t" introducimus et secundum illam ordinamus, habemus accentibus neglectis:

14) $-6z + 6yt + 3xt^2 - 2bt^3 = 0$, inde consecutivum

15) $y + xt - bt^2 = 0$. Priore subtracta existit

$-6z + 4yt + xt^2 = 0$. E quibus facillime fluunt

$$\left.\begin{aligned}(xy - 6bz) + (x^2 + 4by)t &= 0\\(4y^2 + 6xz) + (xy - 6bz)t &= 0\end{aligned}\right\}.$$

Unde denique:

$$(xy - 6bz)^2 = (x^2 + 4by)(4y^2 + 6xz),$$

quam uncis dissolutis priorem nostram (14) existere nemo dubitabit. Videmus igitur hanc superficiem modo peculiarem esse casum aequationis generalis (VII).

3) Et revera ex illa etiam eam accepissemus, si posuissemus pro $z = -z$, deinde $\alpha = +1$; $\beta = 0$, $\gamma = \frac{1}{2}$, $\delta = \varepsilon = \zeta = \eta = \vartheta = 0$, $\varkappa = -\frac{1}{3}b$. Unde fluunt (resp. 5 – 8) $a = -z$; $b = +y$; $c = +\frac{1}{2}x$, $d = -\frac{1}{3}b$, quibus substitutis aequatio (14) existet. Haec hactenus, jam videamus curvam regressoriam.

4. Hanc sane e generali illa aequatione possemus derivare, tamen melius visum est longiore hoc calculo omisso directe eam invenire. Liquet eam accipi, si rursus (15) differentiamus, unde habetur:

16) $x - 2bt = 0$. Inde illa cum (15) conjuncta

17) $4yb + x^2 = 0$ i. e. $y = -\frac{x^2}{4b}$ projectio curvae in planum (xy) et ex illis cum 14) conjunctis habentur

18) $z = -\frac{x^2}{24b}$ projectio in planum (xz)

19) $z^2 = -\frac{y^3}{9b}$ projectio in planum (yz).

Naturam autem hujus curvae si respicimus, projectiones sunt parabola simplex, cujus vertex jacet in origine coordinatarum et parabolae generis sublimioris. Tota curva autem intersectio cylindri supra basin $4by + x^2 = 0$ constructi cum superficie explicabili vel cum alio cylindro constructo supra basin $24bz + x^3 = 0$. Notandum est hoc loco statim eliminatione parametri t projectiones curvae regressoriae haberi simul cum superficiebus, quarum intersectio est, quoniam illae cylindricae sunt.

5. Lineas curvaturae evolventes curvae regressoriae esse intelleximus (cap. I, 5) ibique vidimus si $x = \varphi t$, $y = \psi t$, $z = \chi t$ coordinatae curvae regressoriae, $x_1\, y_1\, z_1$ illae evolventis vel potius lineae curvaturae secundi generis sunt, semper valere aequationes (V). Facile autem intelligitur pro nostra curva esse ex (16—19)

$\varphi t = 2bt$, $\psi t = -bt^2$, $\chi t = -\frac{1}{3} bt^3$. Inde

$\varphi' t = 2b$; $\psi' t = -2bt$; $\chi' t = -bt^2$. Ergo

$\sqrt{\varphi' t^2 + \psi' t^2 + \chi' t^2} = \sqrt{4b^2 + 4b^2 t^2 + b^2 t^4} = b(2 + t^2)$. Quare

$\int dt \sqrt{\varphi' t^2 + \psi' t^2 + \chi' t^2} = 2bt + \frac{1}{3} bt^3 + C.$

Postremo aequationes ipsius lineae curvaturae

$$20)\begin{cases} x_1 = \dfrac{4bt^3 - 6C}{3(2+t^2)} \\ y_1 = \dfrac{6Ct + 6bt^2 - bt^4}{3(2+t^2)} \\ z_1 = \dfrac{4bt^3 + 3Ct^2}{3(2+t^2)} \end{cases}$$

E quibus t eliminata habentur projectiones in plana (xy), (xy) et (yz) t, quorum prima hancce accipit formam simplicissimam $9c^2z_1^2(z_1 - x_1) = 32b^2(c + x_1 - z_1)^3$, aliae autem non tam simplices existunt quartum autem gradum non transcendunt.

§. 3.

Demonstratur superficies explicabiles tertii ordinis omnino esse non posse, nisi conicas.

1. Superficies explicabiles tertii ordinis crederes accipi posse e generali illa quarti gradus aequatione (VII), dummodo duos coëfficientes proportionales vel aequales ponamus. Et re vera, si ponimus $a = b$ vel $c = d$, habemus aequationes tertii gradus

$0 = 81bd^2 - 54bcd + 12c^3 - 3bc^2 + 12b^2d$.

$0 = 81a^2c - 54abc + 12ac^2 - 3b^2c + 12b^3$, forma modo non sensu diversas. Hac autem, quum tres modo restent coëfficientes conicas modo determinare superficies jam ex iis, quae initio hujus partis demonstravimus fluit.

2. Accuratius autem id cognoscemus, si harum superficierum curvam regressoriam explicamus. Quae erit pro $a = b$: $c - 9d = 0$; $b - 3c = 0$; $27d - b = 0$ pro $c = d$: $b - 9a = 0$; $c - 3b = 0$; $27a - c = 0$ his autem aequationibus modo intersectionem trium linearum i. e. punctum et verticem coni determinari luculentissime apparet. Harum igitur rationem habere non necesse est.

3. Ne tamen temere dijudicasse videamur ad elementa superficiei recedamus videamusque, num aequatio quae ita existat, certa quadam functione primigradus dividi possit. Quod quum generaliter fieri non possit — nam si posset, jam illa posset aequatio per a, b, c, d expressa — videamus, num reduci possit ad aliam formam,

pro certis quibusdam quantitatum constantium valoribus. Atque quum ex ipsa aequationis forma luculentissime appareat constantes in ea inesse non posse, ponamus functionem, per quam divisuri sumus

$A'x + B'y + C'z$

et quotientem

$Ax^3 + Bx^2y + Cx^2z + Dxyz + \ldots + Pz^3 + Rz^2 + Sz$ constantibus non additis. Has si multiplicamus comparamusque cum functione nostra VII explicata, hoc calculo satis longo omisso, satis erit hoc notasse esse debere $AA' = 0$, $A'B + AB' = 0$ etc., quibus omnibus satis fieri non potest, nisi aut $\alpha = 0$ aut $\varkappa = 0$ ponatur. His autem substitutionibus evadere aut a proportionalem b aut si non c prop. d, tamen formas existere aequales nemo non intelligit. Prima conicam haberi superficiem jam intelleximus, altera autem item accipi statim videbimus, si consideraverimus multiplicatione existere debere functionem homogeneam, qua conicam destinari notum est.

4. Hoc idem intelligemus si alia methodo aequationes superficierum explicabilium inveniendi utemur, initio commemoratae residua Sturmii dico. Quodsi in formulis Crellianis pro α et β — quibus ille utitur significationibus —

$\alpha = \frac{a}{3d}$, $\beta = \frac{b}{d}$ ponimus in aequatione

$$4\alpha^3 - \beta^2 = 0$$

habemus $4a^3 - 27b^2d = 0$ aequationem superficiei conicae, quod statim apparet, si valores ex F_2 evadentes conjungimus cum illa. Liquet esse debere curvam regressoriam, uti supra $[a = 0,\ b = 0,\ d = 0]$ i. e. punctum. Haec autem aequatio ab Ill. Crelle considerata reducta est tertii ordinis, haberemus autem generalem si pro α et β eos substitueremus valores, quos accipimus comparando cum coefficientibus illius aequationes ortae ex

$$x^3 + 3\alpha_1 x^2 + 3\beta_1 x + \gamma = 0$$

substitutione $x = y - \frac{1}{3}\alpha_1$. Pro hac aequatione si rursus formaremus residua Sturmii liquet necesse esse, ut accipia-

mus nostram (VII.), dummodo rursus $\alpha_1 = \frac{c}{3d}$, $\beta_1 = \frac{b}{3d}$, $\gamma_1 = \frac{a}{d}$ ponamus.

5. Quae aequatio VII. si generalis omnium superficierum explicabilium quarti gradus est, liqueat rectum esse quod pronunciavimus superficies explicabiles tertii gradus nisi conicas omnino non esse. Tamen Ill. Cayley *) in appendice ad tractatum suum: (on the developable derived from an equation of the fifth order) sex alias formas addit, quas ab Ill. Salmon inventas esse dicit, quomodo autem sint inventae, non ostendit

veluti $0 = a^2f^2 + 225b^2e^2 - 32ace^2 - 32b^2df + 480bd^3$
$- 34abef + 76acdf - 12bc^2f - 12ade^2 - 320c^2d^2 - 820bcde$
aliasque contenditque omnes illas ire per curvam regressoriam (VIII). Qua de re quum accuratius alio loco dissertuarum se esse promittit posteriores autem partes diarii illius bibliothecae regiae Berolinensi non esse mihi dicta sint, de his formis dicere omitto. Sed quoniam curva regressoria illarum eadem, quae nostrae esse dicitur, ne impedit quidem, quin id quod contendimus rectum sit. Nam illa generalissima curva tertii gradus esse debet. Quod nisi ex ipsa forma cognosceremus, intelligeremus hisce considerationibus.

6. Quas tamen facere non possumus, nisi paullulum ea respicimus, quae celeberrimi illi anglici geometri Cayley et Salmon exposuerunt de generali theoria curvarum duplicis curvaturae (praeter commentationes supra citatas cf. Salmon C. a. D. m. j. 9 p. 23—46 on the classification of Curves of double curvature). Si enim systema illud, quod antea commemoravimus, contemplamur, systema dicitur,

1) si planum datum m. puncta systematis continet
   ordinis (order. Grad. Ordnung) $= m$
2) si linea data r lineas systematis secat
   dignitatis (rang. Rang) $= r$

*) Camb. a. Dubl. math. journ. 9. p. 158.

3) si punctum datum in n planis systematis jacet classis (class. Klasse) $= n$.

Liquet curvam existere ordinis m, classis r, superficiem explicabilem ordinis r et classis n. De classi superficierum non amplius sumus expondituri, ordo autem r vel dignitas systematis determinatur singularitatibus quibusdam systematis simul cum ordine curvae m. Hic autem ordo m determinatur gradu earum superficierum, quarum intersectio curva cogitatur, quarum ordines si sunt μ et ν. $m = \mu\nu$ ponendum est. Deinde quod attinet ad singularitates systematis, eae sunt puncta stationaria curvae regressoriae, de quibus jam supra exposuimus quorumque numerus $= \beta$ ponatur et lineae, quae per duo puncta non tamen consequentia systematis, ductae sunt. Numerus talium linearum, in quibus punctum datum jacet, ponatur $= h$, cujus valorem per μ et ν expressum liquet esse debere

$$h = \frac{\mu(\mu-1).\ \nu(\nu-1)}{2}.$$ Deinde existit

$$r = m(m-1) - (2h + 3\beta).$$

Quodsi habemus curvam tertii gradus notum est eam aliter non posse generari, quam intersectione duarum superficierum secundi gradus, quibus linea directa communis est. Tum enim curva intersectionis dirumpitur in lineam illam et curvam tertii gradus. Eodem modo nostra etiam curva regressoria accepta est. Pro illa autem est $m = 3$,

$h = \frac{2.1.2.1}{2} = 2$, $\beta = 0$, inde $r = 4$. Omnino igitur curvae tertii ordinis superficies osculatrix explicabilis est quarti gradus, neque ille minui potest, quum curvae tertii gradus puncta stationaria esse non possunt. Et si essent, haberemus pro $\beta = 1$ $r = -1$, quod fieri non posse per se liquet. Curvae autem duplicis curvaturae inferioris ordinis, quam tertii existere non possunt. Ergo clare ac distincte demonstrasse mihi videor superficies explicabiles tertii ordinis non esse.

§. 4.

De superficiebus explicabilibus, quae osculantur curvam intersectionis duarum superficienum secundi gradus.

1. His tamen considerationibus simul ad alias quosdum ducimur resultatus non indignos, quos accuratius examinemus. Si enim superficiem explicabilem generatam fingimus tangentibus curvae duplicis curvaturae exque hac curva regressoria eximus, curvae tertii gradus omnino superficiem explicabilem osculatricem quarti gradus esse jam vidimus. Curva autem quarti gradus generata fingi solet intersectione duarum superficierum secundi ordinis. Est enim pro $\mu=2$, $\nu=2$. $m=4$. Hanc si curvam regressoriam respicimus osculatricis ordo generaliter erit octavus. Habemus enim pro $m=4$, $h=4.3-4=8$, $\beta=0$, $r=8$ (vide postea). Inter has autem superficies singularitates quaedam intercedere possunt et tum facile est intellectu minui ordinem osculatricis.

2. Duae superficies secundi gradus et planum non plura quam quatuor puncta communia habere possunt, nisi se secant in conico i. e. infinite multa puncta communia habent. Sequitur, ut curva intersectionis nullum punctum triplex, duo modo duplicia, unum quadruplex habere possit. Si dua puncta duplicia curvae sunt perque ea et tertium, planum positum fingitur, omnia puncta, in quibus illud alteram superficiem secat in altera esse debent, itaque superficierum intersectio curva plana vel potius duae curvae planae sunt, quarum puncta intersectionis puncta illa duplicia sunt — aut duae illae conicae congruunt punctaque duplicia ita excipiunt. Sin autem dua illa puncta in una linea sita sunt, quod modo in superficiebus explicabilibus vel hyperboloidibus esse potest, curvam intersectionis tertii ordinis existere jam vidimus, quoniam linea illa superficiebus communis esse debet. Si curvae punctum triplex esset, in illo tres rami se secarent, quorum per duo si planum ponitur, ne id quinque puncta cum superficie communia habeat, illi toti in eo inesse debent. Sequitur, ut superficies rursus in duabus curvis planis se secent, quarum altera e tertio

ramo curvae et linea directa consistat. Quae linea, quum primi illi ambo rami plane arbitrarii electi sint, cum uno quoque ex illis in eodem plano jacere i. e. per idem punctum ire debet. Hac autem de causa non jam triplex illud erit, sed quadruplex omnesque illi rami nihil aliud esse possunt, quam lineae directae. Ergo punctum triplex in curva intersectionis duarum superficierum secundi ordinis esse non potest et si quadruplex est curva dirumpitur in quatuor lineas directas per idem punctum euntes.

3. Si autem unum modo punctum duplex in curva intersectionis est ordo illius non minuitur, minuitur autem ordo superficiei osculatricis. Superficies enim secundi ordinis tum in puncto duplici curvae intersectionis contactum habebunt simplicem i. e. duo plana tangentium illarum pro illo congruent. Quodsi est facile apparet pro curva manere quidem $m=4$, $\beta=0$, sed fieri $h=3$. Nam si duae superficies, quarum intersectione curva quaedam orta esse cogitatur in λ punctis (duplicibus quidem in curva) se tangunt, liquet esse $h'=h+\lambda$, quare hic $h'=2+1=3$. Tum existit $r=4.3-6=6$ i. e. superficies explicabilis osculatrix eveniet sexti gradus.

4. Postremo si non modo contactum ordinarium, sed stationarium habent duae superficies i. e. si pro punctis illis duo radii curvaturae illarum aut maximae aut minimae aequales fiunt, liquet in hoc puncto cuspidem curvae esse. Et quoniam vidimus in curva quarti gradus unum modo punctum duplex esse posse, liquet unam modo cuspidem esse. Quare si $\beta=1$ ponitur, h autem $=2$ restat (quum punctum illud jam numeretur), habemns $r=4.3-(2.2+3)=5$. Ergo osculatrix talis curvae quarti gradus cum una cuspide erit quinti gradus. Sed priusquam de his superficiebus fusius exponamus, videamus, quasnam accipiamus aequationes e plano generante, si parametrum usque ad quartam potentiam ascendere sinimus.

Caput IV.

De superficiebus explicabilibus derivatis e functione quarti gradus.

§. 1.

De superficiebus explicabilibus sexti ordinis.

1. Si formam plani generantis esse fingimus:

21) $a + bt + ct^2 + dt^3 + et^4 = 0$

consecutivum est

22) $b + 2ct + 3dt^2 + 4et^3 =$

Inde prius

23) $4a + 3bt + 2ct^2 + dt^3 = 0.$

Quae si conjunguntur eliminatione secundum notam illam methodum facta ut primum summam potentiam deinde constantes eliminemus, habemus:

23) $$[(bd - 16ae)^2 - (3b^2 - 8ac)(3d^2 - 8ce)]^2$$
$$= [(2cd - 12be)(bd - 16ae) - (2bc - 12ad)(3d^2 - 6ce)]$$
$$\times [(2bc - 12ad)(bd - 16ae) - (2cd - 12be)(3b^2 - 8ac)]$$

aequatio octavi quidem gradus, quae tamen uncis dissolutis, quum factor $bd - 16ae$ separari possit, illo non nihilo aequali posito divisa reducitur ad sextum gradum. Habemus enim

IX) $$0 = \left\{ \begin{array}{l} (bd - 16ae)^3 - 2(bd - 16ae)(3b^2 - 8ac)(3d^2 - 8ce) \\ + (9bd - 4c^2)(3b^2 - 8ac)(3d^2 - 8ce) \\ - (bd - 16ae)(2cd - 12be)(2bc - 12ad) \\ + (2bc - 12ad)^2(3d^2 - 8ce) \\ + (2cd - 12be)^2(3b^2 - 8ac). \end{array} \right.$$

Hanc si explicamus uncis dissolutis facillime eam transformare possumus in hanc formam symmetricam:

X) $$4(12ae - 3bd + c^2)^3 - (72ace + 9bcd - 27ad^2 - 27be^2 - 2c^3)^2 = 0.$$

Quae ab illis, quae alioquin datae sunt, coefficientibus modo differt, quum Cayley hancce plani generantis formam accepisse videatur:

$$at^4 + 4bt^3 + 6ct^2 + 4dt + e = 0.$$

Hoc si utimur sane elegantiorem accipimus formam, nempe illam

$$(ae - 4bd + 3c^2)^3 - 27(ace + 2bcd - ad^2 - b^2e - c^3)^2 = 0.$$

Facili autem negotio factoribus comparatis nostram formam accipimus. Nec praetermittendum videtur convenire illam cum ea, quam Cl. Eisenstein conditionem affert, sub qua aequatio quarti gradus — non tamen reducta — duas radices aequales habeat.*)

2. Cujus superficiei habebimus curvam regressoriam si t eliminamus ex illis (22) et (23) conjunctis cum

24) $c + 3dt + 6 \text{ et }^2 = 0$

vel potius illis

$$\begin{cases} c + 3dt + 6et^2 = 0 \\ 3b + 4ct + 3dt^2 = 0 \\ 6a + 3bt + ct^2 = 0. \end{cases}$$

Unde accipitur curva illa intersectio harum superficierum:

$$(3cd - 8be)^2 = (3d^2 - 8ce)(9bd - 4c^2)$$
$$(c^2 - 36ae)^2 = (3cd - 18be)(3bc - 18ad)$$
$$(3bc - 18ad)^2 = (4c^2 - 9bd)(9b^2 - 4ac).$$

vel quod idem est illarum.

$$\text{XI.} \quad \begin{cases} 12ae - 3bd + c^2 = 0. \\ 72ace + 9bcd - 27ad^2 - 27b^2e - 2c^3 = 0. \end{cases}$$

hanc autem sexti gradus esse nemo dubitaverit. Talem autem curvam sexti gradus superficiem osculatricem habere debere statim cognoscemus, si recurremus ad puncta stationaria.

3. Illa inveniuntur t eliminata ex illis 22, 23, 24 et 25) $d + \text{ et } = 0$ (tertio quidem differentiata) vel potius ex illis

25) $d + 4et = 0$

26) $2c + 3dt = 0$

27) $3b + 2ct = 0$

28) $4a + bt = 0.$

Unde $3d^2 = 8ce$; $4c^2 = 9bd$; $3b^2 = 8ac$, quae facile ita scribi possunt

$$\frac{3d}{2e} = \frac{4c}{d} = \frac{9b}{c} = \frac{24a}{b}.$$

Puncta illa determinantur intersectione trium cono-

---

*) Crelle Journal 27. Formulae Ill. Cayley inveniuntur Cr. J. 34 et cambridge and Dublin math. j. 9, 154.

rum quibus linea directa communis est. Accuratius autem quatuor ea esse cognoscemus, si respicimus semper inter functiones illas a, b, c, d, quippe quae sint functiones lineares cordinatarum, intercedere aequationem hujus formae $Aa + Bb + Cc + Dd + Ee = 0$, ubi A, B, C etc. constantes sunt. Quam si conjungimus cum illis 25—28 habemus

$3At^4 - 12\,Bt^3 + 18\,Ct^2 - 12\,Dt + 48\,E = 0$. Qua secundum t resoluta quatuor valores quantitatis t accipiuntur respondentes singulîs punctîs.

4. Quodsi scimus numerum punctorum esse quatuor, ponendum est $\beta = 4$, quumque curva cogitetur intersectio duarum superficierum et tertii et secundi gradus habemus $h = \frac{3.\ 2.\ 2.\ 1}{1.\ 2} = 6$, unde $r = 6.\,5 - (2.\,6 + 3.\,4) = 6$. Est autem curva illa non ea, quam supra contemplati sumus intersectionem duarum superficierum quarti ordinis, sed ea, quam Salmon (l. c. p. 39.) significavit per VI. 5. ostendit enim ille pro curva sexti gradus cum nullis punctis stationariis esse generaliter $h = 6$ (uti supra) $r = 6.\,5 - 2.\,6 = 18$, praeter eam autem quatuordecim alias curvas sexti gradus cogitari posse, quarum peculiarissima illa quidem est. Videmus igitur praeter nostram superficiem (X) alias quasdam sexti gradus existere posse, quae forsitan proprii et peculiares casus hujus generalis formae repraesentari possint. Generantur enim aut tangentibus curvae regressoriae quinti gradus cum $h = 4$, $\beta = 2$ $(r = 6)$ aut quarti cum $h = 3, \beta = 0$, quam supra commemoravimus. Curvas quinti gradus Salmon (l. c. p. 39 ff. V. I—V. 10) demonstravit omnino habere $h = 4$, $\beta = 0$ unde $r + 5.\,4. - 2.\,4 = 12$, deinde r descendere usque ad 6 pro casu illo supra indicato. Aliam autem superficiem sexti gradus osculantem curvam quarti gradus (Salmon IV. 2. p. 37) tractavit Ill. Cayley. *) Paullo accuratius eam examinemus.

*) Cambr. and Dubl. math. journ. 9. p. 47 on the developable, which arise from the intersection of two surfaces of the second order.

5. Duae superficies secundi gradus, quae contactum ordinarium habent in uno puncto, repraesentari possunt aequationibus:

29) $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dz = 0$

30) $a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + 2d'z = 0$. Itaque curva intersectionis, quae curva regressoria superficiei habenda est hisce datur projectionibus:

$\lambda y^2 + \mu z^2 + 2\nu z = 0$

$\lambda x^2 - o z^2 - 2\pi z = 0$

$\lambda^2 (oy + \mu x^2)^2 - 4\lambda (\nu x^2 - \pi y^2 (\nu o - \mu\pi) = 0$

si brevitatis causa ponimus: $ab' - a'b = \lambda$; $ac' - a'c = \mu$; $ad' - a'd = \nu$; $bc' - b'c = o$; $bd' - b'd = \pi$. Superficies ipsa habetur eliminatione quantitatum x, y, z e quatuor aequationibus (29), (30) et 31) $axx' + byy' + (cz + d)z' = dz$

32) $a'xx' + b'yy' + (c'z + d')z' = d'z$.

Hae enim determinant plana tangentium harum duarum superficierum, quae si conjuncta ponuntur lineam generatricem superficiei explicabilis destinant. Ipsam hujus superficiei aequationem non addo, quoniam jam calculata est ab. Ill. Cayley (l. c. p. 51.) mihi autem non contigit, ut eam reducerem ad aequationem X.

6. Quodsi antea rursus rationem habuissemus aequationum a Cl. Eisenstein inventarum conditionum, sub quibus tres radices aequales sint aequationi quarti gradus, eadem invenissemus. Ad alia tamen adducimur, si contemplamur residua Sturmii, quae Ill. Crelle calculavit. Sed priusquam id facimus, necesse erit rursus respicere aequationem explicatam (IX), quum ex Crellii formulis pro reducta aequatione quarti gradus modo supra addito ad generalem regredi aequationem longius sit et quoniam exemplum satis simplex superficiei explicabilis sexti gradus invenire non potui.

§. 2.

De superficiebus explicabilibus quinti ordinis.

1. Si accuratius contemplamur aequationem nostram IX facile apparet gradum illius minui, si duos coëfficientes vel a et b, vel c et d proportionales sive aequales poni-

mus. Existit superficies explicabilis quinti gradus et generalis non conica nec cylindrica quum quatuor restent functiones arbitrariae. Ex (X) autem hujus aequationem deducere non possumus, quum illa per factorem d dividi non possit.

2. Necesse igitur erit aut t eliminare ex aequationibus

33) $a + bt + ct^2 + dt^3 + dt^4 = 0$

34) $b + 2ct + 3dt^2 + 4dt^3 = 0$

aut statim in aequatione (IX) ponere $e = d$ dividereque per d. Existit illa

$$\text{XI)}\quad 0 = \begin{cases} d^2(b-16a)^2 + (9bd-4c^2)(3d-8c)(3b^2-8ac) \\ -2d(b-16a)(3b^2-8ac)(3d-8c) \\ -d(b-16a)(2c-12b)(2bc-12ad) \\ +(3d-8c)(2bc-12ad)^2 + d(2c-12b)^2(3b^2-8ac) \end{cases}$$

quam ut in meliorem traducerem formam mihi quidem non contigit, liquet tamen eam esse quinti ordinis. Cujus de proprietatibus melius disserere poterimus, si rationem habuerimus, curvae regressoriae.

3. Illa accipitur t eliminando e duabus illis (33), (34) et tertia (35) $c + 3dt + 6dt^2 = 0$ vel potius illis:

35) $c + 3dt + 6dt^2 = 0$

36) $3b + 4ct + 3dt^2 = 0$

37) $6a + 3bt + ct^2 = 0.$

Habemus 38) $3d(c-6b)^2 = (3d-8c)(4c^2-9bd)$

39) $3(bc-6ad)^2 = (4c^2-9bd)(9b^2-4ac)$

40) $(c^2-36ad)^2 = (3bc-18ad)\,3d\,(c-6b).$

Harum superficierum communis intersectio curva regressoria est. Ordinem tamen accuratius determinare non possum, veri simile tamen est eam esse quarti gradus. Primum enim vidimus curvam regressoriam superficiei sexti gradus esse intersectionem duarum superficierum et tertii et secundi gradus. Necesse igitur solum est, ut altera etiam reducatur ad secundum gradum, ut curvam ordinis quarti habeamus. Deinde nullam esse sexti aut quinti ordinis curvam, cujus superficiei osculatrix quinti gradus sit, jam supra vidimus et sublimioris esse non potest, quum generalis cujus modo genus peculiare est modo sexti sit. Postremo etiam ultimae conditioni curvae illius cap. III, §. 4.

consideratae (Salmon l. c. p. 37, N. IV. 3) satisfacit, quum unum modo punctum stationarium ei sit.

4. Quod ut cognoscamus tertio differentiemus, habemus 41) $d + 4dt = 0$ i. e. $t = -\frac{1}{4}$. Unum igitur modo valorem quantitatis t habemus, liquet unum modo esse punctum stationarium. Nulla igitur alia videtur esse superficies explicabilis quinti ordinis XI, quam osculatrix curvae intersectionis duarum superficierum secundi gradus contactum stationarium habentium (cf. Cayley l. c. p. 52).

5. Sint superficies illae:

41) $ax^2 + by^2 + 2fyz + 2nz = 0$

42) $a'x^2 + b'y^2 + 2f'yz + 4n'z = 0$

ubi etiam $af' - a'f = 0$, $bn' - b'n = 0$ ponendum. Deinde si ponimus $ab' - a'b = \lambda$, $an' - a'n = \mu$, $bf' - b'f = \nu$ et $nf' - n'f = \pi$, propter aequationem identicam

$$0 = (af' - a'f)(bn, - b'n) + (ab' - a'b)(nf' - n'f) \\ - (an' - a'n)(bf' - b'f)$$

habemus $\lambda\pi = \mu\nu$. Quare existunt projectiones curvae intersectionis parabola simplex

43) $\lambda y^2 + 2\mu z = 0$

et parabolae ordinis sublimioris

44) $\lambda^2 x^4 + 8\nu\pi z^3 = 0$

45) $\nu y^3 - \mu x^2 = 0.$

Superficies autem ipsa accipitra, aut si x, y, z e 41, 42 et illis planorum tangentium aequationibus:

$$axx' + (b + fz')y + (n + fy')z + nz' = 0$$

$$a'xx' + (b + f'z')y + (n' + f'y')z + n'z' = 0$$ eliminanus

aut si e projectionibus (43) et (44) aequationes tangentium pro $z' = z$ ponimus

$$\frac{x' - \varphi(z')}{\varphi'(z')} = \frac{y' - \psi(z')}{\psi'(z')}.$$ Quae existunt si ponimus

$$\alpha^4 = -\frac{8\nu\pi}{\lambda^2}$$ et $\beta^2 = -2\mu$:

$$\frac{x' - \alpha z'^{\frac{3}{4}}}{{}^3/_4\alpha . z'^{-\frac{1}{4}}} = \frac{y' - \beta z'^{\frac{1}{2}}}{{}^1/_2\beta . z'^{-\frac{1}{2}}}.$$

Quae accentibus neglectis evadunt

$$2\beta x - 2\alpha\beta z^{\frac{3}{4}} = 3\alpha y z^{\frac{1}{4}}\, 3 - \alpha\beta z^{\frac{3}{4}} .$$

Unde $2\beta x = 3\alpha y z^{\frac{1}{4}} - \alpha\beta z^{\frac{3}{4}}$.

$$4\beta^2 x^2 = z^{\frac{1}{2}}(9\alpha^2 y^2 - 6\alpha^2\beta y z^{\frac{1}{2}} + \alpha^2\beta^2 z)$$

45) $(4\beta^2 x^2 + 6\alpha^2\beta y z)^2 = z(9\alpha^2 y^2 + \alpha^2\beta^2 z)^2$,

ubi pro α et β valores supra dati essent substituendi.

Harum superficierum non ingrata invenire possunt exempla, si combinamus varia genera superficierum secundi gradus, ita ut contactum habeant stationarium. Hoc tamen liquet non omnes illarum posse sumi, quum globus inprimis excipi debeat, quoniam pro illo radius et minimae et maximae curvaturae radius est. Itaque si contactum stationarium habet cum superficie, quem eum determinavimus, ubi aequales essent radii curvaturae harum superficierum, eam non jam secare poterit. Deinde aequationes superficierum secundi gradus non in hac simplici forma sumi possunt, quae dari solent in geometria analytica, quum hic origo coordinatarum in centro jacet — si modo est centrum. Nam duae ellipsoides exempli gratia, quae concentricae sunt tanguntque non jam unum sed duo puncta communia habent. Atque ita plura etiam essent notanda, quae accuratius enumerare longius sit. Nobis satis esse debet demonstravisse superficiem osculatricem curvae intersectionis duarum superficierum secundi gradus contactum stationarium habentium esse quinti gradus.

6. Sin autem earum habemus rationem formularum a Cl. Crelle l. c. datarum, quae conditiones sunt, sub quibus aequatio quarti gradus reducta cui membrum tertii gradus non est, radices aequales habeant, videmus existere aequationem quinti gradus. In qua si ponimus

$\alpha = \frac{c}{6e}$; $\beta = \frac{b}{4e}$; $\gamma = \frac{a}{e}$ superficiem explicabilem quinti ordinis habebimus. Quam eandem accipiemus, si in aequatione nostra XI $d = 0$ ponemus, tum evadit illa

$$0 = 256a^3e^2 - 128a^2c^2e + 144ab^2ce + 16ac^4 - 4b^2c^3 - 27b^4e,$$

quae facillime ita scribi potest.

XII. $16a(4ae - c^2)^2 - b^2(27b^2e + 4c^3 - 144ace) = 0$.

Hujus superficiei curva regressoria habetur, si in illis XI $d = 0$ ponimus. Statim habemus curvam regressoriam intersectionem harum superficierum

$$12ae + c^2 = 0$$
$$72ace - 27b^2e - 2c^3 = 0.$$

Sed quoniam ex illis non satis appareat natura ejus, alia utamur methodo elimenusque t ex aequationibus

$$a + bt + ct^2 + et^4 = 0$$
$$b + 2ct + 4et^3 = 0$$
$$c + 6et^2 = 0$$

vel ex illis: $c + 6et^2 = 0$

$$3b + 4ct = 0$$
$$8a + 3bt = 0.$$

Inde sequitur, ut intersectio sit harum superficierum.

$$\left.\begin{array}{l} 8c^3 + 27b^2e = 0 \\ 3b^2c + 128a^2e = 0 \\ 9b^2 - 32ac = 0 \end{array}\right\}$$

Facile est intellectu has reduci ad illas

$$\text{XIII.}\quad \left.\begin{array}{l} 9b^2 - 32ac = 0 \\ c^2 + 12ae = 0 \end{array}\right\}$$

i. c. curva regressoria intersectio est duarum superficierum ordinis secundi et conorum. Peculiaris igitur modo casus haec est superficies illius, quae osculatrix est curvae intersectionis generalium duarum superficierum secundi gradus contactum stationarium habentium. Hos enim conos tale habere contactum plane apparet. Numerus enim punctorum stationariorum curvae regressoriae est$=1$, quum sit $12\ et = 0$, unde $a=0$, $b=0$, $c=0$. Est igitur punctum illud intersectio trium planorum $a=0$, $b=0$, $c=0$ vel linearum $[a=0, b=0]$ et $[a=0, c=0]$. Has autem generatrices esse conorum illorum supra commemoratorum resp. $9b^2 - 32ac = 0$ et $c^2 + 12ae = 0$ nemo non videt.

Pro $e =$ constans gradus superficiei non minuitur altera autem de conis, quorum intersectio curva regressoria est, ad cylindrum reducitur. Cylindrum autem nihil aliud esse, quam conum cum vertice infinite remoto nemo ignorabit. Postremo apparet, si duos conos secundi gradus contemplamur contactum habentium ordinarium hunc simul esse debere stationarium, quoniam semper in puncto lineae generatricis coni secare se debent pro illis autem

radium maximae curvaturae $= \infty$ fieri statim apparet, quum cap. I. viderimus pro generatricibus cujusvis superficiei explicabilis illum radium fieri infinite magnum. Quare semper superficies osculatrix curvae intersectionis duorum conorum secundi gradus cum basi arbitraria erit superficies explicabilis quinti gradus.

7. Exemplum.

Si valores nostros simplices introducimus ponimusque $a = \frac{1}{2} z$, *) $b = y$, $c = x$, $e = 1$ aequatio superficiei evadit:

46) $8z(2z - x^2)^2 = y^2(27y^2 + 4x^3 - 72xz)$

quae paullulum modo coefficientibus differt ab ea aequatione, quam Cayley (l. c.) pro tali superficie dat.

Curvae regressoriae aequationes existunt.

47) $x = -bt^2$

48) $y = 8t^3$

49) $z = -bt^4$.

Unde sequuntur projectiones

in planum (xy) : $8x^3 + 27y^2 = 0$

in planum (xz) $x^2 + 6z = 0$

in planum (yz) $512z^3 + 27y^4 = 0$.

Facile est visu curvam ipsam, uti esse debet, esse quarti gradus, deiude superficiorum, quarum intersectia curva est, conum

50) $9y^2 - 16xz = 0$

et cylindrum parabolicum

51) $x^2 + 6z = 0$.

Punctum stationarium curvae regressoriae i. e. illud punctum, in quo coni illi contactum stationarium habent, ipsa origo condinatarum est, nempe $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, quod etiam esse debet pro simplicibus nostris valoribus $a = z$, $b = \alpha y + \beta z$ etc., quoniam horum intersectionem originem condinatarum esse statuimus et supra pro omni-

---

*) Hoc loco $a = \frac{1}{2} z$ ponimus, ut postea radicem extrahere possimus.

bus illis superficiebus punctum stationarium intersectione planorum $[a=0,\ b=0,\ c=0]$ determinari vidimus.

Deinde etiam linearum curvaturae secundi generis aequationes — nam primum generatrices sunt, uti cap. I. vidimus — simplicissimae evadunt, dummodo valores nostros in aequationem V. substituimus. Habemus

$$ds^2 = dt^2\ (144t^2 + 576t^4 + 576t^6)$$

$$ds = 12t(1+2t^2).\ dt.$$

propter: $\varphi' t = -12t$, $\psi' t = 24t^2$, $\chi' t = -24t^3$.

Unde $\int ds = 4t^3 + 6t^4 + C$.

et aequationes ipsarum curvarum:

$$52)\quad x_1 = \frac{-6t^2 + 4t^3 - 6t^4 + C}{1+2t^2}$$

$$53)\quad y_1 = \frac{8t^3 - 8t^4 + 4t^5 + C}{1+2t^2}$$

$$54)\quad z_1 = \frac{-6t^4 + 8t^5 + C}{1+2t^2}$$

Sunt igitur curvae ordinis quinti, quarum singulas habebimus, si quantitatem constantem C variabimus.

8. Liquet deinde praeter has superficies explicabiles quinti ordinis vix alias esse posse, si ea respicimus, quae Ill. Salmon secuti de gradu superficierum explicabilium disputavimus e curva regressoria determinato. Tamen certum hoc esse dicere non possumus, quum semper fieri possit, ut aequatio gradus sublimioris ad casum tam simplicem reducatur.

Caput V.

De superficiebus explicabilibus oriundis e functionibus quinti gradus.

1. Si plani generantis aequationem ponimus

$$55)\quad a + bt + ct^2 + dt^3 + et^4 + ft^5 = 0$$

consequentisque

$$56)\quad b + 2ct + 3dt^2 + 4et^3 + 5ft^4 = 0$$

parametrumque t ex illis eliminamus, facile apparet calculo usque ad finem perducto — quem ipsum addere omitto — accipi aequationem ordinis sexti decimi. Cujus formula satis longa omissa liquet eam reduci debere ad gradum octavum, quod ut perficerem mihi quidem non contigit, sed ut unum modo factorem gradus quarti separarem, ita ut existeret duodecimi. Accuratius tamen de hac aequatione exposuit Cayley *) eamque per unde sexaginta terminos expressam addit, ita ut ne ille quidem elegantiorem illius formam invenire potuisse videatur. Neque ostendit, quomodo eam acceperit. Quare quum melius illo de hac re disserturum me esse vix sperare possim, plura de ea exponere omitto et quam brevissime ea, quae ille invenit additurus sum. Hoc tamen videtur notandum eandem accipi debere aequationem, si pro aequatione quinti ordinis non reducta residuo Sturmii uti supra formamus, sed hac quoque methodo elegantem formam accipere non potui.

2. Curva regressoria habetur e (55) et (56) et tertia illa

$$51)\quad c + 3dt + 6et^2 + 10ft^3 = 0$$

vel potius ex illis

$$57)\quad c + 3dt + 6et^2 + 10ft^3 = 0$$

$$58)\quad 2b + 3ct + 3dt^2 + 2et^3 = 0$$

$$59)\quad 10a + 6bt + 3ct^2 + dt^3 = 0,$$

si parametrum t eliminamus.

Existit intersectio communis trium superficierum septimi ordinis, quarum binae curvam quarti gradus communem habent. Omnibus reductionibus factis eam noni gradus evadere ostendit, uti esse debet, quum pro $n = 5$, $3(n = 2) = 9$ existat.

3. Osculatrix autem tam simplicis gradus evadit punctorum stationarium causa, quorum numerus $= 8$ esse debet, nam $4(5 - 3) = 8$. Et re vera si tertio differentiamus habemus.

$$60)\quad d + 4et + 10ft^2 = 0,$$

qua conjuncta cum illis

---

*) Cambr. and Dubl. math. journal vol. 9, p. 152 ff.

$$61)\quad c + 2dt + 2et^2 = 0$$

$$62)\quad 2b + 2ct + dt^2 = 0$$

$$63)\quad 10a + 4bt + ct^2 = 0.$$

parametroque eliminata puncta illa accipiuntur. Simili autem modo, ut in superficiebus explicabilibus sexti ordinis agentes et cum 60—63 illam

$$64)\quad Aa + Bb + Cc + Dd + Ee + Ff = 0.$$

conjungentes intelligimus aequationem existere ordinis octavi, ex qua octo etiam pro t valores accipimus.

4. Sed ne haec quidem superficies ea est, quae osculatur curvam regressoriam intersectionem duarum superficierum secundi gradus contactum non habentium. Ea autem facile inveniri potest ex aequationibus

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + d = 0$$

$$a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + d = 0$$

simili modo, quo aliae illae capitibus prioribus. De hac etiam jam exposuit Cayley *l. c.* p. 49 ff. neque longiore contemplatione digna est, quum nemo dubitet eam fieri gradus octavi. Num tamen illa proprius et peculiaris generalioris casus sit annon dijudicare non audeo.

5. Tamen si in priore aequatione $a = b$, vel $e = f$ ponimus, rursus gradus superficiei minuitur habemusque superficiem explicabilem septimi gradus non conicam. Numerus tamen punctorum stationariorum minui non videtur. Sed hic casus difficilior sit, quam de quo disputare possimus. Liquet deinde tres coëfficientes poni posse aequales et ne tum quidem haberi conicam superficiem. Deinde si $e = 0$ ponimus rursus simplicior septimi gradus existet superficies eamque etiam haberemus, si Sturmii residua formaremus pro aequatione reducta quinti gradus. Omnino si amplius procedat aliquas disquiratque superficies explicabiles multo sublimiorum ordinum, simplicius videatur illis uti residuis. Nam eliminatione liquet ex aequatione sexti gradus haberi aequationem ordinis tricesimi secundi etc., quae sane factores quosdam continebunt, per quos dividi potest. Hoc tamen pro residuis illis fieri non videtur.

6. Postremo notandum videtur, si ad elementa aut superficierum aut curvae regressoriae recedimus, melius esse non jam quantitatum x, y, z sed illarum $\frac{x}{w}$, $\frac{y}{w}$, $\frac{z}{w}$ a, b, c etc. functiones determinare ita, ut aequationes symmetricae evadant.

VITA.

Natus sum, Carolus Hamdorff, Berolini VII. die mensis Martis anni 1842 patre Guilelmo Augusto Gustavo tum adsessore judicii camerarii, matre Augusta e gente Picht. Patrem autem mihi jam puero praematura, morte anno 1847 abreptum tristissime lugeo, matre adhuc vigente maxime gaudeo. Fidei addictus sum evangelicae. Quum pater paulo postquam natus sum Gubenam, in oppidum Lusatiae inferioris jure consultus vocaretur, ipse etiam in hoc oppido educatus sum. Primum literarum elementis a singulis praeceptoribus imbutus post patris mortem per tria semestria institutione usus sum, quae dicitur elementaria, tum anno 1850 adii gymnasium Gubanum auspiciis Fr. Guil. Graseri viri illustrissimi. Hanc scholam per novem annos frequentavi, inprimis Wicherto, Kockio, Saussio, Niemanno praeceptoribus opera data, deinde vere anni 1859 testimonio maturitatis instructus Berolinum adii, ut in mathematicis et physicis operam navarem. Ibi inter Universitatis literariae Friedericae Guilelmae cives a Viro Cl. Dove, rectore magnifico receptus a decano spectatissimo Cl. Magnus philosophorum ordini adscriptus sum. Hac autem in alma literarum sede per septem semestria scholis interfui et disserentes audivi hosce:

De mathematicis: Ill. Ill. Kummer, Ohm, Arndt, Förster. De physicis: Ill. Ill. Dove, Poggendorff, Quincke, Franz. De chemicis et mineralogicis: Ill. Ill. Mitscherlich, G. Rose, Schneider. De zoologicis et botanicis: Ill. Ill. Peters, Schaum, Braun. De philosophia, philologia et historia: Ill. Ill. Trendelenburg, Michelet, Boeckh, Haupt, Müllenhoff, Droysen, Köpke, Gosche.

Quibus viris optime de me meritis gratias me agere quam maximas semperque acturum esse profiteor.

SENTENTIAE.

I.

Analysis quae dicitur spectralis a Kirchhoff et Bunsen nuper inventa non idonea esse videtur, qua sola utamur ad corporis cujusvis elementa invenienda.

II.

Considerationibus geometricis in mathesi plerumque plus assequimur quam calculo.

III.

Methodus radium curvaturae ex intersectione duarum normalium consequentium inveniendi minus accurata videtur esse.

IV.

Infinitum in mathesi non quantitas perfecta et absoluta intelligendum est sed ea modo, quae semper crescat.

V.

Somnum animi potius, quam corporis est.